一次元非等方ハイゼンベルグ系Massive Thirring系の固有状態の分布(物性におけるソリトンの統計力学とダイナミックス,科研費研究会報告)

飛田, 和男; 石川, 正勝

一次元非等方ハイゼンベルグ系，Massive Thirring系の固有状態の分布

北大工　飛田和男，道都短大　石川正勝

一次元量子ハイゼンベルグ－イジング系（スピン1/2，磁場中）

$$\mathcal{H} = J\sum_{i=1}^{N}\left\{S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \Delta\left(S_i^z S_{i+1}^z - \frac{1}{4}\right) - 2\mu_0 H S_z\right\}$$

の統計力学は，高橋（$\Delta = 1$）[1)]，Gaudin（$\Delta > 1$）[2)]，高橋，鈴木（$\Delta < 1$）[3)]により，ベーテ仮説の方法により定式化されている。この系の固有状態は自由なマグノンの他に，いくつかのマグノンの束縛状態が許される。$\Delta \geqq 1$の場合は，束縛状態を作るマグノンの数に制限はないが，$\Delta < 1$の場合は，いくつかの拘束条件を仮定しないと，高温展開と矛盾する結果が出てしまう。高橋，鈴木は，この拘束条件を，高温展開と矛盾しない結果を得るための仮定として導入したが，ここでは，この拘束条件が，ベーテ状態の波動関数に対する境界条件から厳密に導びける事を示す。[4)]

M ケの下向きスピンとN－M ケの上向きスピンをもつベーテ状態は次の様に書ける。

$$\Psi = \sum_{z_1 < \cdots < z_M} \Phi(z_1, \cdots, z_M)\, S_{z_1}^- \cdots S_{z_M}^- |0\rangle$$

ここで，$|0\rangle$は下向きスピンのない状態，

$$\Phi = \sum_P \exp\left[i\left(\sum_{j=1}^{M} k_{Pj} z_j + \frac{1}{2}\sum_{j<l}\phi_{P_j P_l}\right)\right]$$

$k_1, \cdots, k_M$ は準運動量，Pは$1, \cdots, M$の置換演算子。位相差$\phi_{\alpha\beta}$は

$$\cot\frac{1}{2}\phi_{\alpha\beta} = \cot\theta \cdot \tanh\frac{1}{2}\theta(x_\alpha - x_\beta), \quad \cos\theta = \Delta$$

ここでx_α はk_α を次のように変換したものである。

$$\cot\frac{1}{2}k_\alpha = \cot\frac{1}{2}\theta \cdot \tanh\frac{1}{2}\theta x_\alpha$$

波動関数Φは次の境界条件をみたしていなくてはならない。

$$\left|\lim_{z_1, \cdots, z_r \to -\infty} \Phi(z_1, \cdots, z_M)\right| < \infty$$

$$\left|\lim_{z_{M-r+1} \cdots z_M \to \infty} \Phi(z_1, \cdots, z_M)\right| < \infty$$

ここで，rは1からMまでの任意の整数である。これは，M ケの下向きスピンの座標の内，任意のrケをひとまとめに$\pm\infty$にもっていっても，波動関数が有限にとどまるという条件である。また左辺が0にならない時は，周期的境界条件を課さなくてはならない。k_iがすべて実数の場合は上の条件は自動的にみたされるが，k_iが複素数の場合でも，位相差の因子が発散を打消している場合は上の条件

をみたす。これより次の事が分る：
$\{x_1, \cdots, x_M\}$ の任意の部分集合 ω に対し

$$\left| \prod_{x_j \in \omega} \frac{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\theta(x_j+i)}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\theta(x_j-i)} \right| \lessgtr 1$$

のとき，少くとも1つの $x_i \in \omega$ に対し，ω に含まれない $x_m = x_i \pm 2i$（複号同順）がなくてはならない。また

$$\left| \prod_{x_j \in \omega} \frac{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\theta(x_j+i)}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\theta(x_j-i)} \right| = 1$$

であれば，何も条件はつかない。
これより，束縛状態を作る状態のパラメータ x は次のような形の組となる。

$$x_{j,v} = x_v + (n-1-2j)i + \frac{1}{2}\frac{\pi}{\theta}(1-v)i \qquad j = 1, \cdots, n$$

$v = \pm 1$，x_v は実数。
ここで，n は束縛状態を作るマグノンの数で，次の条件をみたす。

$$v \sin(n-1)\theta > 0$$

$$\left[\frac{j\theta}{\pi}\right] + \left[\frac{(n-j)\theta}{\pi}\right] = \left[\frac{(n-1)\theta}{\pi}\right] \qquad j = 1, \cdots, n-1$$

これらは，高橋，鈴木の仮定した拘束条件と全く同じである。
許される束縛状態を決定する上記の方法は，波動関数に対する境界条件に基づいているので，一般的にベーテ仮説の方法で解ける系に対し適用可能である。マッシヴ・シリング系に適用してみると，全く同じ拘束条件が導かれることが分った。
上記の結果はFowlerら[5]により我々と独立に導かれた。彼らは[6]，ごく最近，高橋鈴木の方法を用いてマッシヴ・シリング系の統計力学を定式化したが，これは，量子サイン・ゴルドン系の統計力学と等価であると考えられる。しかし，マッシヴ・シリング系は，初めから連続体モデルであるため，古典サイン・ゴルドン系の極限において，既存の転移行列の方法で求めた結果を再現しないという困難がある。この点を改良し，ベーテ仮説に基づく量子サイン・ゴルドン系の統計力学を完成させる試みを現在進めている。

References

1) M. Takahashi Prog. Theor. Phys. 46 (1971) 401
2) M. Gaudin Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 1301
3) M. Takahashi and M. Suzuki Prog. Theor. Phys. 48 (1972) 2187
4) K. Hida, Phys. Lett. 84A (1981) 338
5) M. Fowler and X. Zotos Phys. Rev. B24 (1981) 2634
6) M. Fowler and X. Zotos preprint; X. Zotos and M. Fowler preprint